

МАТЕМАТИКА 1

ЛЕКЦИЈА 6

3 – Л6.1 НЕПРЕКИДНОСТ РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

Дефиниција непрекидности реалне функције у тачки

Дефиниција преко граничне вредности: Реална функција f непрекидна у тачки $x_0 \in D_f \cap D_f'$ — ако је $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. *Дефиниција преко*

прираштаја: Реална функција f непрекидна у тачки $x_0 \in D_f \cap D_f'$ — ако је $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0$, где је Δx — прираштај независно променљиве x у тачки x_0 , а $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — прираштај функције f у тачки x_0 при прираштају Δx независно променљиве. *Дефиниција преко околине:* — у дефиницији граничне вредности функције f у тачки x_0 преко околине ставити $l = f(x_0)$ и заменити $B(x_0, \delta)$ са $B[x_0, \delta)$. *Дефиниција "на језику $\varepsilon - \delta$ "* — у дефиницији граничне вредности функције f у тачки x_0 на језику $\varepsilon - \delta$ ставити $l = f(x_0)$ и изоставити услов $x \neq x_0$.

Теорема: Ако је реална функција f непрекидна у тачки x_0 онда је она ограничена на скупу $B[x_0, r) \cap D_f$ за неки позитивни број r .

Теорема: Ако је реална функција f непрекидна у тачки x_0 и $f(x_0) \neq 0$, онда постоји неки позитивни број r такав да је $f(x)$ истог знака као $f(x_0)$ за сваки $x \in B[x_0, r) \cap D_f$.

Непрекидност с леве и с десне стране

Реална функција f непрекидна с леве (с десне) стране у тачки x_0 — ако је рестрикција $f|A$ непрекидна у тачки x_0 , где је $A = (-\infty, x_0] \cap D_f$ ($A = [x_0, +\infty) \cap D_f$).

Теорема: Нека је f реална функција и x_0 тачка из D_f таква да у сваком од интервала $(x_0 - r, x_0)$ и $(x_0, x_0 + r)$, за сваки $r > 0$ има тачака из D_f . Тада је f непрекидна у тачки x_0 ако и само ако је непрекидна с леве и десне стране у тачки x_0 .

Реална функција f непрекидна на скупу $S \subset D_f$ — ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа. Ако је притом S неки интервал, онда се у горњој дефиницији захтева да у сваком крају интервала који припада интервалу функција

буде непрекидна с једне стране, и то с десне ако је то леви крај, а с леве ако је то десни крај. Реална функција f непрекидна — ако је непрекидна на скупу D_f .

Тачке прекида реалне функције

Тачка прекида реалне функције f — свака тачка из $D_f \cap D_f'$ у којој f није непрекидна. Тачка прекида прве врсте — тачка прекида у којој постоје лева и десна гранична вредност. Тачка прекида друге врсте — тачка прекида која није тачка прекида прве врсте.

Својства функција непрекидних у датој тачки

Теорема: Ако су функције f и g непрекидне у тачки x_0 и $D_f = D_g$, тада су и функције $f + g$ и fg непрекидне у тачки x_0 . Ако је још и $g(x_0) \neq 0$, тада је и функција $\frac{f}{g}$ непрекидна у тачки x_0 . Доказ — на основу одговарајуће теореме о граничним вредностима.

Теорема: Нека су f и g реалне функције такве да постоји сложена функција $f \circ g$. Ако је функција g непрекидна у тачки x_0 а функција f непрекидна у тачки $g(x_0)$, онда је сложена функција $f \circ g$ непрекидна у тачки x_0 . Доказ — на вежбама (АГ).

Свака основна елементарна функција је непрекидна.

Својства функција непрекидних на сегменту

Теорема (прва БолцаноКошијева): Ако је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, онда f има бар једну нулу у интервалу (a, b) . Без доказа.

Теорема (друга БолцаноКошијева): Ако је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, онда f на сегменту $[a, b]$ узима сваку вредност између $f(a)$ и $f(b)$. Без доказа.

Теорема (прва Вајерштрасова): Ако је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$, онда је она ограничена на том сегменту. Без доказа.

Теорема (друга Вајерштрасова): Ако је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$, онда она достиже свој инфимум и свој супремум на том одсечку. Без доказа.

Теорема: Ако је функција f непрекидна и монотono растућа (опадајућа) на сегменту $[a, b]$, онда је њена инверзна функција f^{-1} непрекидна на сегменту $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$) Без доказа.

Равномерна непрекидност

Реална функција f равномерно непрекидна на скупу $A \subset D_f$ — ако за сваки позитивни број ε постоји позитивни број δ такав да за сваке две тачке x_1 и x_2 скупа A за које је $|x_1 - x_2| < \delta$ важи $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Теорема (Канторова): Ако је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$, онда је она и равномерно непрекидна на том сегменту. Без доказа.

3 – 6.2 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН РЕАЛНИХ ФУНКЦИЈА ЈЕДНЕ РЕАЛНЕ НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЉИВЕ

Извод функције у датој тачки

Проблеми који су довели до појма извода. Проблем брзине: Материјална тачка $M = M(x)$ се креће праволинијски, дуж осе Ox . Позната је зависност координате x тачке M од времена t : $x = f(t)$, $t \in [a, b]$. Треба одредити брзину $v(t_0)$ тачке M у сваком поједином тренутку t_0 , $t_0 \in [a, b]$. Решење

проблема: $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. *Проблем тангенте:* Нека је крива C у

равни Oxy график (непрекидне) реалне функције f , $D_f = (a, b)$, и нека је $M_0(x_0, y_0)$ нека тачка на C . Треба одредити тангенту криве C у тачки M_0 .

Решење проблема: коефицијент правца тражене тангенте је једнак

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Дефиниција извода функције у датој тачки. Унутрашња тачка скупа $D \subset \mathbf{R}$ — свака тачка $a \in D$ таква да је нека њена базична околина садржана у

D . Ознака скупа свих унутрашњих тачака скупа D — $\overset{\circ}{D}$. *Извод функције f у*

тачки $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$ — $f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Геометријско тумачење појма извода функције: Извод функције f ($D_f = (a, b)$) у тачки $x_0 \in (a, b)$ једнак је коефицијенту правца тангенте графика функције f у тачки $(x_0, f(x_0))$.

Механичко тумачење појма извода функције: Извод функције f ($D_f = (a, b)$) у тачки $t_0 \in (a, b)$ једнак је брзини $v(t_0)$ у тренутку t_0 материјалне тачке $M = M(x)$ која се креће праволинијски дуж осе Ox тако да је њена апсциса x једнака $f(t)$ у сваком тренутку $t \in (a, b)$.

Теорема: Ако функција f има извод у тачки x_0 , онда је она непрекидна у тој тачки.

$$\text{Леви (десни) извод функције } f \text{ у тачки } x_0 \text{ — } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right). \text{ Ознака — } f'_-(x_0) \left(f'_+(x_0) \right).$$

Диференцијабилност и диференцијал функције у датој тачки

Дефиниција диференцијабилности функције у датој тачки. Нека је f једна реална функција и $x_0 \in D_f^\circ$. Кажемо да је функција f *диференцијабилна у тачки* x_0 ако постоје број A и функција α , такви да је

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

за све тачке $x = x_0 + \Delta x$ у некој базичној околини $B[x_0, r)$ тачке x_0 ($\Delta x \in (-r, r)$), и да $\alpha(\Delta x)$ тежи 0 кад Δx тежи нули. Притом се израз $A \cdot \Delta x$ назива *главним делом прираштаја функције f у тачки x_0* при прираштају Δx *независно променљиве*.

Дефиниција диференцијала функције у датој тачки. Нека је реална функција f диференцијабилна у тачки x_0 . Тада се главни део прираштаја функције f у тачки x_0 при прираштају Δx назива *диференцијалом функције f у тачки x_0* при прираштају Δx *независно променљиве*. Ознака — $df(x_0, \Delta x) = df$.

Теорема: Нека је f једна реална функција и $x_0 \in D_f^\circ$. Потребан и довољан услов да функција f буде диференцијабилна у тачки x_0 јесте да f има извод у тачки x_0 .

Доказ. Потребност услова:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \alpha(\Delta x)] = A, \\ \exists f'(x_0) (= A).$$

Довољност услова:

$$\exists f'(x_0), \quad \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} - f'(x_0) =: \alpha(\Delta x) \quad (\alpha(0) := 0), \\ \Delta f(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Специјално, ако је $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$, тада је $df = dx = \Delta x$. На основу тога, обично пишемо dx уместо Δx . Тако имамо, за било коју функцију f диференцијабилну у тачки x_0 , $df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$. Отуд је $f'(x_0) = \frac{df(x_0, dx)}{dx}$.

Геометријско тумачење појма диференцијала функције: Диференцијал функције f у тачки x_0 при прираштају Δx независно променљиве једнак је прираштају ординате тачке тангенте графика функције f у тачки $(x_0, f(x_0))$, при промени апсцисе од x_0 на $x_0 + \Delta x$.

Изводи и диференцијали виших редова. За сваки природни број n дефинише се n -ти извод реалне функције, $f^{(n)}$, на следећи начин: 1^0 $f^{(1)}(x_0) := f'(x_0)$ за сваку реалну функцију f и сваку тачку x_0 такве да постоји $f'(x_0)$; 2^0 за сваки природни број n , $f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0)$ за сваку реалну функцију f и сваку тачку x_0 такве да f има n -ти извод у свакој тачки неке базичне околине тачке x_0 и да постоји $(f^{(n)})'(x_0)$. На аналоган начин се дефинише и n -ти диференцијал реалне функције, $d^n f$, за сваки природни број n : 1^0 $d^1 f(x_0, dx) := df(x_0, dx)$ за сваку реалну функцију f и сваку тачку x_0 такве да постоји $df(x_0)$; 2^0 за сваки природни број n , $d^{n+1} f(x_0, dx) := d(d^n f(\cdot, dx))(x_0, dx)$ за сваку реалну функцију f и сваку тачку x_0 такве да f има n -ти диференцијал у свакој тачки неке базичне околине тачке x_0 и да постоји $d(d^n f(\cdot, dx))(x_0)$. Лако се закључује (индукцијом по n) да је $d^n f(x_0, dx) = f^{(n)}(x_0) dx^n$. На основу тога, $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0, dx)}{dx^n}$.

Правила диференцирања

Теорема (о изводу збира, производа, количника): Нека су функције f и g диференцијабилне у тачки x_0 . Тада важи: 1^0 функција $f + g$ је диференцијабилна у тачки x_0 и њен извод је $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$; 2^0 функција fg је диференцијабилна у тачки x_0 и њен извод је $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$; 3^0 ако је још и $g(x_0) \neq 0$, тада је функција $\frac{f}{g}$ диференцијабилна у тачки x_0 , при чему је

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Доказ — на вежбама (АГ).

У овој теорему став 1^0 важи и за више од два сабирка: ако су функције f_1, f_2, \dots, f_n диференцијабилне у тачки x_0 , тада је таква и функција $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ и њен извод је $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \dots + f_n'(x_0)$. Доказ — самостално (индукцијом по n). Такав став важи и за изводе виших редова.

Став 2⁰ горње теореме може да се уопшти и на изводе виших редова: ако функције f и g имају n -ти извод у тачки x_0 , тада и функција fg има n -ти извод у тачки x_0 , и важи

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x_0) g^{(i)}(x_0).$$

Доказ — самостално (индукцијом по n). Ово је такозвано Лајбницово правило.

Правила за налажење диференцијала: 1⁰ $d(f+g) = df + dg$; 2⁰ $d(fg) = gdf + f dg$; 3⁰ $d \frac{f}{g} = \frac{gdf - f dg}{g^2}$.

Теорема (о изводу сложене функције): Нека су f и g реалне функције такве да постоји сложена функција $f \circ g = h$, нека је $x_0 \in D_g$, $g(x_0) = u_0 \in D_f$, и нека постоје изводи $g'(x_0)$ и $f'(u_0)$. Тада постоји и $h'(x_0)$ и важи $h'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0)$. Доказ — на вежбама (АГ).

Инваријантност форме првог диференцијала: Под претпоставкама из горње теореме, $dh(x_0, dx) = f'(g(x_0)) dg(x_0, dx)$, тј. $dh = f'(g) dg$.

Теорема (о изводу инверзне функције): Ако је функција f диференцијабилна у тачки x_0 , ако је $f'(x_0) \neq 0$, и ако f има инверзну функцију непрекидну у тачки y_0 , $y_0 = f(x_0)$, тада је функција f^{-1} диференцијабилна у тачки y_0 , и важи $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Доказ — на вежбама (АГ).

Теорема (о изводу функције задате параметарски): Нека су реалне функције f и g дефинисане на скупу T , нека постоји f^{-1} и нека је $h = g \circ f^{-1}$. Ако је $t_0 \in \overset{\circ}{T}$, ако постоје изводи $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$, при чему је $f'(t_0) \neq 0$, и ако је функција f^{-1} непрекидна у тачки x_0 , $x_0 = f(t_0)$, тада постоји извод $h'(x_0)$ и $h'(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$. Доказ — на вежбама (АГ).

У горњој теореме може да се пише $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in T$, и $y = h(x) = g(f^{-1}(x))$, $x \in D_f$, (функција h изражава зависност y од x задату параметарски, помоћу параметра t и зависности x и y од параметра t), при чему формула за извод функције h из те теореме, у другим ознакама, добија облик

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = \frac{\frac{dy(t_0)}{dt}}{\frac{dx(t_0)}{dt}}.$$

Таблица извода

$$\text{I} \quad (C)' = 0 \quad (C = \text{const.}).$$

$$\text{II} \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0 \quad (\alpha \in \mathbf{R}). \quad (\alpha \in \mathbf{N}: x \in \mathbf{R}) \quad (\alpha \in -\mathbf{N}: x \neq 0)$$

$$\text{III} \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0). \quad (a = e: (e^x)' = e^x)$$

$$\text{IV} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0. \quad (a = e: (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0)$$

$$\text{V} \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\text{VI} \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbf{Z} \right); \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus (\pi \mathbf{Z}).$$

$$\text{VII} \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (c \operatorname{h} x)' = s \operatorname{h} x.$$

$$\text{VIII} \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (c \operatorname{th} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

$$\text{IX} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1); \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$\text{X} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$